AMANTE

TAVOLA

D'INTERPOLAZIONE

TAVOLA GENERALE

D'INTERPOLAZIONE

DI

FEDELE AMANTE

Professore di Geodesia nel R. Collegio militare e nel R. Officio Topografico, Socio residente dell'Accademia Pontaniana e Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Accademia di Scienze e belle lettere di Palermo etc.

Presentata all'Accademia Pontaniana e dalla medesima approvata per gli Atti.

NAPOLI,
Dalla Reale Tipografia della Guerra
1843.

DISCUSSIONE

INTORNO ALLA SCELTA DELLA FORMOLA ADOPERATA NELLA COSTRUZIONE DELLA TAVOLA.

§. I. Nell'*Appendice* alle *Effemeridi* di Milano del 1830, l'illustre astronomo *Oriani*, ragionando di un'antica formola d'interpolazione inserita negli atti di Berlino, e riprodotta dal chiaris. prof. *Bessel* nel giornale di *Schumacher*, la ricava da altra formola riportata già nelle stesse *Effemeridi*, ed accenna il modo di farne uso tenuto dal lodato *Bessel*, il quale prepara a quest'oggetto una tavola de' logaritmi di alcuni valori X, X', X'' etc. funzioni del tempo. L'astronomo di Milano osserva che la formola preferita dal sig. *Bessel* esige un calcolo più lungo che non richiegga la formola delle *Effemeridi*, cui dà l'aspetto seguente;

$$A_2 + \left(\delta^{i} - \tfrac{1}{2}\delta^{ii} - \tfrac{1}{6}\delta^{iii} + \tfrac{1}{12}\delta^{iv} + \tfrac{1}{12}\delta^{v}\ldots\right)\left(\frac{N}{12}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\delta^{ii} - \tfrac{1}{12}\delta^{iv} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)\left(\frac{N}{12}\right)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2\cdot 3}\left(\delta^{iii} - \tfrac{1}{2}\delta^{iv} - \tfrac{1}{4}\delta^{v}\ldots\right)\left(\frac{N}{12}\right)^3$$
$$+ \tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\delta^{iv} - \ldots\ldots\right)\left(\frac{N}{12}\right)^4$$
$$+ \tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\delta^{v}\ldots\ldots\right)\left(\frac{N}{12}\right)^5 \ldots\ldots (M)$$

Intanto per calcolare anche questa formola più semplice si debbono formare con le differenze $\delta^{i}, \delta^{ii}, \delta^{iii}\ldots$ i coefficienti delle potenze del tempo $\frac{N}{12}$, aggiungere i logaritmi di quelli coefficienti ai logaritmi delle potenze, trovare i numeri corrispondenti, e farne la riduzione.

A noi sembra che, volendo usare i logaritmi, sarebbe più utile l'immediata applicazione delle serie d'interpolazione sotto la loro forma ordinaria, siccome

$$y = A + hd' + \frac{h(h-1)}{2}d'' + \frac{h(h-1)(h-2)}{2\cdot 3}d''' \ldots;$$

la quale offre il vantaggio che il coefficiente del termine seguente ha sempre per fattore il coefficiente del termine precedente. Ma è chiaro poi che l'interpolazione riuscirebbe assai più facile se i termini dipendenti dalle differenze seconda, terza etc. potessero ottenersi da altrettante tavole.

Nella *Conoscenza de' tempi* si trova calcolata da *M. Mattieu* una tavola d'interpolazione, la quale dà il valore del termine dipendente dalla differenza seconda, con l'argomento dell' ora data, e per la semisomma delle due differenze seconde che risultano da quattro valori presi nelle tavole astronomiche. Pare dunque che non rimarrebbe se non ad aggiungere a questa tavola un'appendice che desse i termini dipendenti dalle differenze degli ordini superiori. Ma la cosa non è tanto semplice quanto si mostra a primo aspetto, poichè la tavola di *M. Mattieu* suppone che si adotti per differenza seconda la media di due come abbiamo accennato, circostanza che non si verifica nella formola usata comunemente; e di più la tavola medesima è calcolata da 10 in 10 minuti, il che sarebbe sufficiente per l'esattezza de' risultamenti, ma essendo per brevità disposta come quelle a doppia entrata, l'uso n'è incomodo se non vi si aggiungono le differenze, e dovrebbe poi contenere i centesimi per dare con esattezza i decimi. Per questa ragione, e per la mancanza de' termini dipendenti dalle differenze degli ordini superiori, pare che la tavola in discorso sia adoperata dagli astronomi soltanto nel calcolo approssimato de' luoghi della Luna. Per ottenere dunque una tavola generale d'interpolazione mediante la quale gli elementi lunari fossero calcolati con esattezza e facilità, conveniva scegliere una formola che fosse più d'ogni altra accomodata all'oggetto per la sua maggiore convergenza, ed estendere il calcolo della tavola sino ai termini che potessero nelle applicazioni acquistare un valore apprezzabile. Ecco quanto ci siamo proposti di fare in questo lavoro.

§. II. Rappresentino $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ i diversi valori di un elemento lunare corrispondenti a tempi equidifferenti. Se l'intervallo costante di tempo viene indicato con l'unità, e si chiami h il tempo dato di un termine da interpolarsi fra A_2, ed A_3, contato dall'istante corrispondente al primo termine A, il termine richiesto si potrà calcolare con la formola a tutti nota

$$(1) \ldots y = A + hd^{\text{i}} + \frac{h(h-1)}{2} d^{\text{ii}} + \frac{h(h-1)(h-2)}{2 \cdot 3} \Delta^{\text{iii}} + \frac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \delta^{\text{iv}}$$
$$+ \frac{h(h-1)(h-2)(h-3)(h-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \delta^{\text{v}} \ldots$$

dove le differenze $d^{\text{i}}, d^{\text{ii}}, \Delta^{\text{iii}}, \delta^{\text{iv}}, \delta^{\text{v}}$ sono quelle notate nel seguente quadro;

$$\begin{array}{llllll}
A & & & & & \\
 & d^{\text{i}} & & & & \\
A_1 & & d^{\text{ii}} & & & \\
 & \Delta^{\text{i}} & & \Delta^{\text{iii}} & & \\
A_2 & & \delta^{\text{ii}} & & \delta^{\text{iv}} & \\
 & \delta^{\text{i}} & & \delta^{\text{iii}} & & \delta^{\text{v}} \\
A_3 & & \Delta^{\text{ii}} & & \Delta^{\text{iv}} & \\
 & D^{\text{i}} & & D^{\text{iii}} & & \\
A_4 & & D^{\text{ii}} & & & \\
 & D^{\text{i}} & & & & \\
A_5 & & & & &
\end{array}$$

Chiamiamo t il tempo che ha per origine l'istante corrispondente ad A_2, e cerchiamo una serie in cui entrino il tempo t in vece di h, onde preparare la formola al calcolo di una tavola, e le differenze $\delta^{\text{i}}, \delta^{\text{ii}}, \delta^{\text{iii}}, \delta^{\text{iv}}, \delta^{\text{v}}$ in vece delle $d^{\text{i}}, d^{\text{ii}}, \Delta^{\text{iii}} \ldots$ Sarà $h = t + 2$ ed inoltre, ricordandosi che ogni differenza si ottiene sottraendo sempre il termine precedente dal seguente in ciascuna serie verticale, si avrà facilmente,

$$\Delta^{\text{iii}} = \delta^{\text{iii}} - \delta^{\text{iv}}$$
$$d^{\text{ii}} = \delta^{\text{ii}} - \delta^{\text{iii}} + \delta^{\text{iv}}$$
$$d^{\text{i}} = \delta^{\text{i}} - 2\delta^{\text{ii}} + \delta^{\text{iii}} - \delta^{\text{iv}}$$
$$A = A_2 - 2\delta^{\text{i}} + 3\delta^{\text{ii}} - \delta^{\text{iii}} + \delta^{\text{iv}}$$

Sostituendo ad $A, h, d^{I}, d^{II}, \Delta^{III}$ i loro valori si otterrà,

$$A_2 \begin{array}{r} -2 \\ +(t+2) \end{array}\Bigg\}\delta^{I} \begin{array}{r} +3 \\ -2(t+2) \\ +\frac{(t+2)(t+1)}{2} \end{array}\Bigg\}\delta^{II} \begin{array}{r} -1 \\ +(t+2) \\ -\frac{(t+2)(t+1)}{2} \\ +\frac{(t+2)(t+1)t}{2\cdot3} \end{array}\Bigg\}\delta^{III} \begin{array}{r} +1 \\ -(t+2) \\ +\frac{(t+2)(t+1)}{2} \\ -\frac{(t+2)(t+1)t}{2\cdot3} \\ +\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{2\cdot3\cdot4} \end{array}\Bigg\}\delta^{IV} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\delta^{V}$$

e riducendo i coefficienti di $\delta^{I}, \delta^{II}, \delta^{III}$ e δ^{IV} con l'avvertenza che tutti debbono avere per fattore comune t, e gli ultimi due hanno anche per fattore $t+1$, si avrà in fine la serie che si cercava,

$$(2)\ldots y = A_2 + t\delta^{I} + \frac{t(t-1)}{2}\delta^{II} + \frac{t(t-1)(t+1)}{2\cdot3}\delta^{III} + \frac{t(t-1)(t-2)(t+1)}{2\cdot3\cdot4}\delta^{IV} + \frac{t(t-1)(t-2)(t+1)(t+2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\delta^{V}\ldots.$$

§. III. Si cerchi inoltre una serie che contenga le differenze $\delta^{I}, \Delta^{II}, \delta^{III}, \Delta^{IV}, \delta^{V}$, e sarà facile ricavarla dalla precedente riflettendo che $\delta^{II} = \Delta^{II} - \delta^{III}$, e $\delta^{IV} = \Delta^{IV} - \delta^{V}$; si avrà

$$(3)\ldots y = A_2 + t\delta^{I} + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^{II} + \frac{t(t-1)(t-2)}{2\cdot3}\delta^{III} + \frac{t(t-1)(t-2)(t+1)}{2\cdot3\cdot4}\Delta^{IV} + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t+1)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\delta^{V}\ldots$$

Finalmente, prendendo la semisomma delle serie (2), (3), se ne ricaverà subito la seguente,

$$(4)\ldots y = A_2 + t\delta^{I} + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\frac{\Delta^{II}+\delta^{II}}{2} + \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{2\cdot3}\delta^{III} + \frac{t(t-1)(t-2)(t+1)}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{\Delta^{IV}+\delta^{IV}}{2} + \frac{t(t-1)(t-2)(t+1)(t-\frac{1}{2})}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\delta^{V}\ \text{etc.}$$

L'antica formola inserita negli atti di Berlino, di cui si è parlato nel §. I. si ricava pure prendendo la semisomma delle serie (2), (3), ma trasportando l'origine del tempo nella metà dell'intervallo compreso fra il tempo di A_2^2 e quello di A_2.

§. IV. Il terzo termine della formola (4) dipendente dalle differenze 2.e, è quello che si ottiene dalla tavola di *M. Mattieu*, per cui la serie (4) potrebbe servire a ricalcolare questa tavola con le modificazioni accennate nel §. I. ed a costruire una seconda tavola per le differenze degli ordini superiori. Ma prima di adottare la serie (4) per la costruzione della nuova tavola generale, è necessario esaminare se debba preferirsi alle precedenti (2) e (3), e discutere sino a quale ordine di differenze i suoi termini possono acquistare un valore apprezzabile.

§. V. Da un esame degli elementi lunari registrati nelle effemeridi astronomiche di 12 in 12 ore, sembra potersi stabilire che le differenze terze non arrivano mai a 4′, le quarte a 60″, e le quinte a 20″. Partendo da questo dato, calcoliamo il massimo valore che possono acquistare i termini dipendenti dalle differenze suddette nelle serie (2), (3) e (4).

Nella serie (3) il coefficiente di δ^{III} è $\frac{t(t-1)(t-2)}{2\cdot3}$, e ponendo $t(t-1)(t-2) = F$,

si avrà, $F=t^3-3t^2+2t$, e $\frac{dF}{dt}=3t^2-6t+2$; il quale coefficiente differenziale di 1.° ordine fatto eguale a zero darà, $t=1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\begin{cases}1,5773\\ 0,4227\end{cases}$. Di questi due valori di t il primo non può ammettersi, perchè è maggiore dell'unità indicante l'intervallo fra cui si vuole interpolare, ed il secondo, sostituito nel coefficiente differenziale di 2.° ordine $6t-6$ lo rende negativo, onde per esso la funzione diviene massima. Il valore di $\frac{t(t-1)(t-2)}{2\cdot 3}$, quando $t=0,4227$ è $0,0641$, e moltiplicato per δ''', che si suppone eguale a $4'$, ovvero $240''$, dà $0,0641\times 240''=15'',38$, che sarà il massimo valore di questo termine nella serie (3). Il termine corrispondente nella serie (2) è $\frac{t(t-1)(t+1)}{2\cdot 3}\delta'''$, nel quale operando come quì sopra, si farà $F=t(t-1)(t+1)=t^3-t$, e $\frac{dF}{dt}=3t^2-1=0$, e quindi $t=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm 0,5773$. Il valore positivo di t, che è il solo che possa ammettersi, rende positivo il coefficiente differenziale di 2.° ordine $6t$, per cui corrisponde ad un minimo; ma riflettendo che per essere $t<1$, la funzione $t(t-1)(t+1)$ è sempre negativa, è chiaro che quel valore, il quale è minimo assolutamente considerato, corrisponde ad una massima determinazione numerica col segno negativo. Il termine $\frac{t(t-1)(t+1)}{2\cdot 3}\delta'''$, facendo in esso $t=0,5773$, e $\delta'''=4'$, diviene $-15'',38$.

Passando alle differenze quarte, il coefficiente del termine ad esse relativo è lo stesso nelle tre serie (2), (3), (4). Si faccia $F=t(t-1)(t-2)(t+1)=t^4-2t^3-t^2+2t$, e si avrà,

$$\frac{dF}{dt}=4t^3-6t^2-2t+2=0,\ \frac{d^2F}{dt^2}=12t^2-12t-2.$$

Ora, l'equazione $4t^3-6t^2-2t+2=0$, ovvero $t^3-\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}=0$, è evidentemente soddisfatta dal valore $t=\frac{1}{2}$, per cui, diviso il primo membro per $t-\frac{1}{2}$, si avrà l'equazione di 2.° grado $t^2-t-1=0$, che ha per radici $t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Questi due valori di t debbono rifiutarsi perchè uno è negativo e l'altro maggiore della unità; e però il valore che rende la funzione massima sarà $t=\frac{1}{2}$, come apparisce dal coefficiente differenziale di 2.° ordine. Il termine $\frac{t(t-1)(t-2)(t+1)}{2\cdot 3\cdot 4}\delta^{iv}$, fatto $t=\frac{1}{2}$, e $\delta^{iv}=60''$, risulta di $1'',40$, che è il massimo valore cui può giungere.

Rispetto alle differenze quinte, nella serie (3), si faccia,

$$F=t(t-1)(t-2)(t-3)(t+1)=t^5-5t^4+5t^3+5t^2-6t;\ \text{sarà},$$

$$\frac{dF}{dt}=5t^4-20t^3+15t^2+10t-6=0,\ \text{ovvero}\ t^4-4t^3+3t^2+2t-\frac{6}{5}=0.$$

Per risolvere questa equazione osserviamo che, sostituendo successivamente a t i valori 0, 1, 2, il primo membro cambia sempre di segno, e quindi si può conchiudere che vi sono radici fra 0 ed 1, e fra 1 e 2. Supponiamo $t=\frac{1}{2}$, e $t=\frac{3}{2}$, ed approssimando queste radici col metodo di Newton, troveremo due valori di t, di cui la somma si avvicina molto a 2. Per assicurarci se effettivamente l'equazione proposta ha due radici la cui somma eguaglia il 2 esattamente, bisognerà esaminare se, supponendola soddisfatta da un valore t' dato all'incognita, lo sia pure da $2-t'$. Sostituiamo nel primo membro dell'equazione me-

desima $2-t'$ in luogo di t, ed avremo l'espressione

$(2-t')^4-4(2-t')^3+3(2-t')^2+2(2-t')-\frac{6}{5}$, che sviluppata e ridotta diviene

$$t'^4-4t'^3+3t'^2+2t'-\tfrac{6}{5};$$

ciò che mostra chiaramente che se t' è radice, $2-t'$ lo è pure. Dunque l'equazione proposta ha due radici la cui somma è 2, e poichè la somma di tutte le radici è 4, come apparisce dal coefficiente del secondo termine, anche le rimanenti due radici avranno per somma 2. Dopo di ciò sarà facile di scindere il polinomio $t^4-4t^3+3t^2+2t-\frac{6}{5}$ in fattori di 2.° grado, che dovranno avere la forma t^2-2t+m, t^2-2t+n, e si potrà a tal fine stabilire l'equazione identica,

$$\begin{aligned} t^4-4t^3+3t^2+2t-\tfrac{6}{5} &= (t^2-2t+m)(t^2-2t+n) \\ &= t^4-4t^3 \left.\begin{matrix}+n\\+4\\+m\end{matrix}\right\} t^2 \left.\begin{matrix}-2n\\-2m\end{matrix}\right\} t+mn; \end{aligned}$$

che darà le relazioni, $3=n+4+m$, $2=-2m-2n$, $-\frac{6}{5}=mn$; ovvero $n+m=-1$, $nm=-\frac{6}{5}$; e perciò $n=-1-m$, $m(-1-m)=-\frac{6}{5}$, $m^2+m=\frac{6}{5}$, $m=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{6}{5}+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{5}}$. Le equazioni di 2.° grado in cui si scompone la proposta saranno dunque, $t^2-2t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{5}}$, e $t^2-2t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{5}}$, ed i quattro valori dell' incognita risulteranno come segue,

$$t=\tfrac{1}{2}\left\{2\pm\sqrt{6\pm2\sqrt{\tfrac{29}{5}}}\right\}=\begin{cases}2,6444\\1,5439\\-0,6444\\0,4561.\end{cases}$$

Il solo valore 0,4561 che possa ammettersi, sostituito nel coefficiente differenziale di 2.° ordine $20t^3-60t^2+30t+10$ lo rende positivo, e però la funzione sarebbe minima; ma quì pure, riflettendo che F è sempre negativa, si può conchiudere che il minimo corrisponde ad una massima determinazione numerica negativa. Si ponga $t=0,4561$ e $\delta^{\text{v}}=20''$ nel termine completo $\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t+1)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\delta^{\text{v}}$, e si avrà $-0'',24$ per massimo valore negativo di questo termine.

Nella serie (2) l'equazione da risolversi per trovare il valore di t che rende massimo il termine $\frac{t(t-1)(t-2)(t+1)(t+2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\delta^{\text{v}}$, è $t^4-3t^2+\frac{4}{5}=0$, derivativa dal 2.° grado; la quale risoluta, dà $t=\frac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{\frac{29}{5}}}=0,5439$, onde il massimo valore di quel termine è $+0'',24$.

§. VI. Applichiamo la stessa analisi alla serie (4). Ed esaminando in primo luogo il termine dipendente dalle differenze terze, facciamo $F=t(t-1)(t-\frac{1}{2})=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t$; sarà, $\frac{dF}{dt}=3t^2-3t+\frac{1}{2}=0$, ovvero $t^2-t+\frac{1}{6}=0$; da cui si avrà,

$$t=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{2}\left\{1\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right\}=\begin{cases}0,7886\\0,2114.\end{cases}$$

Dei quali valori di t il secondo 0,2114 rende la funzione massima; e però il massimo valore del termine $\frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{2\cdot3}\delta'''$, supponendo $\delta'''=4'$, sarà $0,008\times240''=1'',92$. Il valore $t=0,7886$ dà un minimo, ma essendo F negativa quando $t>\frac{1}{2}$, il minimo si cambia in massimo negativo; ed in fatti, supposto $t=0,7886$, e $\delta'''=4'$, nel termine in discorso, esso diviene $-1'',92$.

Il termine dipendente dalle differenze quarte non differisce nella serie (4) da quello già esaminato per le altre due serie, e solo può modificarne il valore, ne' casi particolari, la semisomma $\frac{\Delta^{\text{IV}}+\delta^{\text{IV}}}{2}$ delle differenze usata come fattore, in vece delle differenze Δ^{IV}, o δ^{IV}.

Rispetto alle differenze quinte, si faccia $F=t(t-1)(t-2)(t+1)(t-\frac{1}{2})$, e si prenda il differenziale di questa funzione senza svilupparla; sarà

$$\frac{dF}{dt}=(t-1)(t-2)(t+1)(t-\tfrac{1}{2})+t(t-2)(t+1)(t-\tfrac{1}{2})+t(t-1)(t+1)(t-\tfrac{1}{2})$$
$$+t(t-1)(t-2)(t-\tfrac{1}{2})+t(t-1)(t-2)(t+1)=0$$

Sotto una tal forma sarà più facile riconoscere se questa eqnazione, che corrisponde a $t^4-2t^3+t-\frac{1}{5}=0$, ha due radici la cui somma eguaglia un numero razionale, siccome si è osservato per le equazioni esaminate più sopra. Imperocchè la funzione $\frac{dF}{dt}$ dovrà rimanere la stessa se a t si sostituisca $1-t$, ovvero $2-t$, e simili; e fatto il saggio con $1-t$ si ottiene

$$\frac{dF}{dt}=t(t+1)(t-2)(t-\tfrac{1}{2})+(t-1)(t+1)(t-2)(t-\tfrac{1}{2})+(t-1)t(t-2)(t-\tfrac{1}{2})$$
$$+(t-1)t(t+1)(t-\tfrac{1}{2})+(t-1)t(t+1)(t-2);$$

che non differisce dalla funzione precedente se non nell'ordine de' termini che la compongono. Questo risultamento dimostra che effettivamente t ha due valori la cui somma eguaglia l'unità; e poichè la somma di tutte le radici dell'equazione, $t^4-2t^3+t-\frac{1}{5}=0$ è 2, le rimanenti due radici avranno anche per somma l'unità. Si potrà dunque scomporre il primo membro dell'equazione in fattori di 2.° grado della forma t^2-t+m, t^2-t+n, come si è praticato di sopra, e si avranno le due equazioni di 2.° grado, $t^2-t=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$, che risolute daranno i seguenti quattro valori dell'incognita,

$$t=\tfrac{1}{2}\left\{1\pm\sqrt{3\pm6\sqrt{\tfrac{1}{5}}}\right\}=\begin{cases}0{,}7814\\0{,}2186\\1{,}6920\\-0{,}6920\end{cases}$$

Rigettando gli ultimi due, il primo valore 0,7814 sostituito nel coefficiente differenziale di 2.° ordine lo rende negativo, ed il secondo 0,2186 positivo; ma perchè la funzione $t(t-1)(t-2)(t+1)(t-\frac{1}{2})$ è negativa quando $t<\frac{1}{2}$, ambedue questi valori corrisponderanno ad una massima determinazione numerica. E se nel termine completo, $\frac{t(t-1)(t-2)(t+1)(t-\frac{1}{2})}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\delta^{\text{V}}$, si facciano successivamente $t=0{,}7814$, $\delta^{\text{V}}=20''$, e $t=0{,}2286$, $\delta^{\text{V}}=20''$, si avranno i massimi valori positivo e negativo di quel termine, i quali saranno $+0'',017$, $-0'',017$.

§. VII. L'esame in confronto delle serie (2), (3), (4) mostra che i termini relativi alle differenze d'indice dispari sono nella (4) assai più piccoli che nelle (2) e (3). Per la qual cosa, il termine dipendente dalle differenze terze, essendo molto piccolo nella serie (4), si potrà ottenere con gran facilità da una tavola calcolata a quest' oggetto, e in molti casi sarà trascurabile; ed il termine relativo alle differenze quinte sarà assolutamente nullo nella serie (4), mentre nelle (2), (3) potrebbe giungere ad $\frac{1}{4}$ di secondo.

In conseguenza di questa disamina la *Tavola generale d'interpolazione* esposta qui appresso, è stata calcolata sulla formola (4) limitata alle differenze *quarte*. Essa è accompagnata dalle avvertenze necessarie, e dagli esempi opportuni a facilitarne l'uso; i quali, se non c'inganniamo, mostrano ancora che la nostra tavola, specialmente costrutta per calcolare i luoghi della Luna, potrebbe servire per qualunque altra specie d'interpolazione.

TAVOLA GENERALE

D'INTERPOLAZIONE.

Per interpolare fra numeri calcolati da 12 in 12 ore prendetene sei in modo che il termine da interpolarsi cada, secondo l'ora data, tra mezzo ai due numeri centrali fra i sei adottati. Fate le differenze 1.ª, 2.ª, 3.ª *e* 4.ª *sottraendo sempre il termine precedente dal seguente nella stessa colonna verticale, e date alle* differenze *i segni che risultano da questa convenzione.*

Il termine cercato si otterrà facendo la somma algebrica del terzo fra i sei numeri scelti, della parte proporzionale calcolata con l'ora data e con la differenza 1.ª *centrale, e delle tre* correzioni *della tavola.*

La prima *correzione della tavola è relativa alle* differenze 2.ª; *essa si calcola con l'*argomento *dell'ora data, e per i minuti ed i secondi contenuti nella semisomma delle due* differenze 2.ª *centrali. Siccome i numeri della tavola sono calcolati da 10 in 10 minuti dell'argomento, così per ottenere facilmente la correzione per i minuti intermedi, si sono notate in carattere corsivo le differenze fra i numeri di ogni colonna. Il segno di questa* prima *correzione sarà sempre contrario a quello della semisomma delle* differenze 2.ª *indicate.*

La seconda *correzione della tavola dipende dalle* differenze 3.ª; *essa si calcola con l'argomento dell'ora data, e per i minuti ed i secondi contenuti nella* differenza 3.ª *centrale. Il segno della correzione è simile a quello della differenza terza, se l'ora data è minore di* 6^h, *ed è contrario, se l'ora data è maggiore di* 6^h.

La terza *correzione dipende dalle* differenze 4.ª; *essa si calcola con l'argomento dell'ora data e per i secondi contenuti nella semisomma delle due* differenze 4.ª. *Il suo segno è lo stesso di quello della semisomma indicata.*

Quando le differenze terze sono costanti, in vece di prendere sei termini per l'interpolazione, basterà prenderne quattro.

1.ª CORREZIONE Differenze seconde (minuti.)

Il segno della correzione è sempre contrario a quello della semisomma delle due differenze seconde centrali.

ARGOMENTO		SEMISOMMA DELLE DUE DIFFERENZE 2.ᵉ CENTRALI.									
ORA DATA		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′
0ʰ00′	12ʰ00′	0″000	0″000	0″000	0″000	0″000	0″000	0″000	0″000	0″000	0″000
		·411	·822	1.233	1·644	2·054	2·465	2·876	3·287	3·698	4·109
10	11.50	0,411	0,822	1,233	1,644	2,054	2,465	2,876	3,287	3,698	4,109
		·399	·798	1·198	1·597	1·997	2·396	2·795	3·194	3·594	3·993
20	40	0,810	1,620	2,431	3,241	4,051	4,861	5,671	6,481	7,292	8,102
		·388	·776	1·163	1·551	1·939	2·327	2·714	3·102	3·489	3·877
30	30	1,198	2,396	3,594	4,792	5,990	7,188	8,385	9,583	10,781	11,979
		·376	·752	1·128	1·504	1·880	2·256	2·633	3·010	3·386	3·762
40	20	1,574	3,148	4,722	6,296	7,870	9,444	11,018	12,593	14,167	15,741
		·365	·729	1·094	1·459	1·823	2·188	2·553	2·916	3·281	3·646
50	10	1,939	3,877	5,816	7,755	9,693	11,632	13,571	15,509	17,448	19,387
		·353	·706	1·059	1·412	1·765	2·118	2·471	2·824	3·177	3·530
1.00	11.00	2,292	4,583	6,875	9,167	11,458	13,750	16,042	18,333	20,625	22,917
		·341	·683	1·024	1·365	1·707	2·049	2·390	2·732	3·073	3·414
10	10.50	2,633	5,266	7,899	10,532	13,165	15,799	18,432	21,065	23,698	26,331
		·330	·660	·990	1·320	1·650	1·979	2·309	2·639	2·969	3·299
20	40	2,963	5,926	8,889	11,852	14,815	17,778	20,741	23,704	26,667	29,630
		·318	·636	·955	1·273	1·591	1·909	2·228	2·546	2·864	3·182
30	30	3,281	6,562	9,844	13,125	16,406	19,687	22,969	26,250	29,531	32,812
		·307	·614	·920	1·227	1·534	1·841	2·147	2·454	2·761	3·068
40	20	3,588	7,176	10,764	14,352	17,940	21,528	25,116	28,704	32,292	35,880
		·295	·590	·885	1,180	1·475	1·771	2·066	2,361	2·656	2·951
50	10	3,883	7,766	11,649	15,532	19,415	23,299	27,182	31,065	34,948	38,831
		·284	·567	·851	1·135	1·418	1·701	1·985	2·268	2·552	2·836
2.00	10.00	4,167	8,333	12,500	16,667	20,833	25,000	29,167	33,333	37,500	41,667
		·272	·544	·816	1·088	1·360	1·632	1·904	2·176	2·448	2·720
10	9.50	4,439	8,877	13,316	17,755	22,193	26,632	31,071	35,509	39,948	44,387
		·260	·521	·781	1·041	1·302	1·562	1·822	2·084	2·344	2·604
20	40	4,699	9,398	14,097	18,796	23,495	28,194	32,893	37,593	42,292	46,991
		·249	·498	·747	·996	1·245	1·494	1·742	1·990	2·239	2·488
30	30	4,948	9,896	14,844	19,792	24,740	29,688	34,635	39,583	44,531	49,479
		·237	·474	·712	·949	1·186	1·423	1·661	1·899	2·136	2·373
40	20	5,185	10,370	15,556	20,741	25,926	31,111	36,296	41,482	46,667	51,852
		·226	·452	·677	·903	1·128	1·354	1·580	1·805	2·031	2·257
50	10	5,411	10,822	16,233	21,644	27,054	32,465	37,876	43,287	48,698	54,109
		·214	·428	·642	·856	1·071	1·285	1·499	1·713	1·927	2·141
3.00	9.00	5,625	11,250	16,875	22,500	28,125	33,750	39,375	45,000	50,625	56,250

Aumento da darsi alle differenze di questa tavola per ciascun minuto contenuto nel complemento a 10 del numero di minuti che serve a calcolare la parte proporzionale, da prendersi sempre additiva.

		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′
		·0006	·0012	·0017	·0023	·0029	·0035	·0041	·0046	·0052	·0058

1.° CORREZIONE Differenze seconde (secondi.)

Il segno della correzione è sempre contrario a quello della semisomma delle due differenze seconde centrali.

ARGOMENTO ORA DATA		SEMISOMMA DELLE DUE DIFFERENZE 2.e CENTRALI.								
		10″	20″	30″	40″	50″	6″	7″	8″	9″
0h 00′	12h 00′	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00
		·07	·14	·21	·27	·34	·04	·05	·05	·06
10	11 50	0,07	0,14	0,21	0,27	0,34	0,04	0,05	0,05	0,06
		·07	·13	·20	·27	·34	·04	·04	·06	·06
20	40	0,14	0,27	0,41	0,54	0,68	0,08	0,09	0,11	0,12
		·06	·13	·19	·26	·32	·04	·05	·05	·06
30	30	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	0,12	0,14	0,16	0,18
		,06	·12	·19	·25	·31	·04	·04	·05	·06
40	20	0,26	0,52	0,79	1,05	1,31	0,16	0,18	0,21	0,24
		·06	·13	·18	·24	·31	·03	·05	·05	·05
50	10	0,32	0,65	0,97	1,29	1,62	0,19	0,23	0,26	0,29
		·06	·11	·18	·24	·29	·04	·04	.05	·05
1.00	11.00	0,38	0,76	1,15	1,53	1,91	0,23	0,27	0,31	0,34
		·06	·12	·17	·23	·28	·03	·04	·04	·05
10	10.50	0,44	0,88	1,32	1,76	2,19	0,26	0,31	0,35	0,39
		·05	·11	·16	·22	·28	·04	·04	·05	·05
20	40	0,49	0,99	1,48	1,98	2,47	0,30	0,35	0,40	0,44
		·06	·10	·16	·21	·26	·03	·03	·04	·05
30	30	0,55	1,09	1,64	2,19	2,73	0,33	0,38	0,44	0,49
		·05	·11	·15	·20	·26	·03	·04	·04	·05
40	20	0,60	1,20	1,79	2,39	2,99	0,36	0,42	0,48	0,54
		·05	·09	·15	·20	·25	·03	·03	·04	.04
50	10	0,65	1,29	1,94	2,59	3,24	0,39	0,45	0,52	0,58
		·04	·10	·14	·19	·23	·03	·04	·04	·04
2.00	10.00	0,69	1,39	2,08	2,78	3,47	0,42	0,49	0,56	0,62
		·05	·09	·14	·18	·23	·02	·03	·03	·05
10	9.50	0,74	1,48	2,22	2,96	3,70	0,44	0,52	0,59	0,67
		·04	·09	·13	·17	·22	·03	·03	·04	·03
20	40	0,78	1,57	2,35	3,13	3,92	0,47	0,55	0,63	0,70
		·04	.08	·12	·17	·20	·02	·03	·03	·04
30	30	0,82	1,65	2,47	3,30	4,12	0,49	0,58	0,66	0,74
		·04	·08	·12	·16	·20	·03	·02	·03	·04
40	20	0,86	1,73	2,59	3,46	4,32	0,52	0,60	0,69	0,78
		·04	·07	·12	·15	·19	·02	·03	·03	·03
50	10	0,90	1,80	2,71	3,61	4,51	0,54	0,63	0,72	0,81
		·04	·07	·10	·14	·18	.02	·03	·03	·03
3.00	9.00	0,94	1,87	2,81	3,75	4,69	0,56	0,66	0,75	0,84

1.ª CORREZIONE Differenze seconde (minuti.)

Il segno della correzione è sempre contrario a quello della semisomma delle due differenze seconde centrali.

ARGOMENTO		SEMISOMMA DELLE DUE DIFFERENZE 2.e CENTRALI.									
ORA DATA		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′
3h00′	9h00′	5″625	11″250	16″875	22″500	28″125	33″750	39″375	45″000	50″625	56″250
		·203	·405	·608	·810	1·013	1·215	1·418	1·620	1·823	2·025
10	8.50	5,828	11,655	17,483	23,310	29,138	34,965	40,793	46,620	52,448	58,275
		·191	·382	·573	·764	·955	1·146	1·337	1·528	1·719	1·910
20	40	6,019	12,037	18,056	24·074	30,093	36,111	42,130	48,148	54,167	60,185
		·179	·359	·538	·718	·897	1·077	1·255	1·435	1·614	1·794
30	30	6,198	12,396	18,594	24,792	30,990	37,188	43,385	49,583	55,781	61,979
		·168	·335	·503	·671	·839	1·006	1·175	1·343	1·511	1·678
40	20	6,366	12,731	19,097	25,463	31,829	38,194	44,560	50,926	57,292	63,657
		·156	·313	·469	·625	·781	·938	1·094	1·250	1.406	1·563
50	10	6,522	13,044	19,566	26,088	32,610	39,132	45,654	52,176	58,698	65,220
		·145	·289	·434	·579	·723	·868	1·013	1·157	1·302	1·447
4.00	8.00	6,667	13,333	20,000	26,667	33,333	40,000	46,667	53,333	60,000	66,667
		·133	·267	·399	·532	·666	·799	·931	1·065	1·198	1·331
10	7.50	6,800	13,600	20,399	27,199	33,999	40,799	47,598	54,398	61,198	67,998
		·121	·243	·365	·486	·607	·729	·851	·972	1·094	1·215
20	40	6,921	13,843	20,764	27,685	34,606	41,528	48,449	55,370	62,292	69,213
		·110	·219	·330	·440	·550	·659	·770	·880	·989	1·099
30	30	7,031	14,062	21,094	28,125	35.156	42,187	49,219	56,250	63,281	70,312
		·099	·197	·295	·394	·492	·591	·688	·787	·886	·984
40	20	7,130	14,259	21,389	28,519	35,648	42,778	49,907	57,037	64,167	71,296
		·086	·174	·260	·347	·434	·521	·608	·695	·781	·868
50	10	7,216	14,433	21,649	28,866	36,082	43,299	50,515	57,732	64,948	72,164
		·076	·150	·226	·301	·376	·451	·527	·601	·677	·753
5.00	7.00	7,292	14,583	21,875	29,167	36,458	43,750	51,042	58,333	65,625	72,917
		·063	·128	·191	·254	·319	·382	·445	·510	·573	·636
10	6.50	7,355	14,711	22,066	29,421	36,777	44,132	51,487	58,843	66,198	73,553
		·052	·104	·156	·209	·260	·312	·365	·416	·469	·521
20	40	7,407	14,815	22,222	29,630	37,037	44,444	51,852	59,259	66,667	74,074
		·041	·081	·122	·162	·203	·244	·283	·324	·364	·405
30	30	7,448	14,896	22,344	29,792	37,240	44,688	52,135	59,583	67,031	74,479
		·029	·058	·087	·115	·144	·173	·203	·232	·261	·289
40	20	7,477	14,954	22,431	29,907	37,384	44,861	52,338	59,815	67,292	74,768
		·017	·034	·052	·070	·087	·104	·121	·139	·156	·174
50	10	7,494	14,988	22,483	29,977	37,471	44,965	52,459	59,954	67,448	74,942
		·006	·012	·017	·023	·029	·035	·041	·046	·052	·058
6.00	6.00	7,500	15,000	22,500	30,000	37,500	45,000	52,500	60,000	67,500	75,000
Aumento da darsi alle differenze di questa tavola per ciascun minuto contenuto nel complemento a 10 del numero di minuti che serve a calcolare la parte proporzionale, da prendersi sempre additiva.											
		·0006	·0012	·0017	·0023	·0029	.0035	·0041	·0046	·0052	·0058

1.ª CORREZIONE Differenze seconde (secondi.)

Il segno della correzione è sempre contrario a quello della semisomma delle due differenze seconde centrali.

ARGOMENTO ORA DATA		SEMISOMMA DELLE DUE DIFFERENZE 2.e CENTRALI.								
		10″	20″	30″	40″	50″	6″	7″	8″	9″
3h 00′	9h 00′	0″94	1″87	2″81	3″75	4″69	0″56	0″66	0″75	0″84
		·03	·07	·10	·14	·17	.02	02	·03	·03
10	8 50	0,97	1,94	2,91	3,89	4,86	0,58	0,68	0,78	0,87
		·03	·07	·10	·12	·16	·02	·02	·02	·03
20	40	1,00	2,01	3,01	4,01	5,02	0,60	0,70	0,80	0,90
		·03	·06	·09	·12	·14	·02	·02	·03	·03
30	30	1,03	2,07	3,10	4,13	5,16	0,62	0,72	0,83	0,93
		·03	·05	·08	·11	·14	·02	·02	·02	·02
40	20	1,06	2,12	3,18	4,24	5,30	0,64	0,74	0,85	0,95
		·03	·05	·08	·11	·13	·01	·02	·02	·03
50	10	1,09	2,17	3,26	4,35	5,43	0,65	0,76	0,87	0,98
		·02	·05	·07	·09	·13	·02	·02	·02	·02
4.00	8.00	1,11	2,22	3,33	4,44	5,56	0,67	0,78	0,89	1,00
		·02	·05	·07	·09	·11	·01	·01	·02	·02
10	7.50	1,13	2,27	3,40	4,53	5,67	0,68	0,79	0,91	1,02
		·02	·04	·06	·08	·10	·01	·02	·01	·02
20	40	1,15	2,31	3,46	4,61	5,77	0,69	0,81	0,92	1,04
		·02	·03	·06	·08	·09	·01	·01	·02	·01
30	30	1,17	2,34	3,52	4,69	5,86	0,70	0,82	0,94	1,05
		·02	·04	·04	·06	·08	·01	·01	·01	·02
40	20	1,19	2,38	3,56	4,75	5,94	0,71	0,83	0,95	1,07
		·01	·03	·05	·06	·07	·01	·01	·01	·01
50	10	1,20	2,41	3,61	4,81	6,01	0,72	0,84	0,96	1,08
		·02	·02	·04	·05	·07	·01	·01	·01	·01
5.00	7.00	1,22	2,43	3,65	4,86	6,08	0,73	0,85	0,97	1,09
		·01	·02	·03	·04	·05	·01	·01	·01	·01
10	6.50	1,23	2,45	3;68	4,90	6,13	0,74	0,86	0,98	1,10
		·00	·02	·02	·04	·04	·00	·00	·01	·01
20	40	1,23	2,47	3,70	4,94	6,17	0,74	0,86	0,99	1,11
		·01	·01	·02	·03	·04	·00	·01	·00	·01
30	30	1,24	2,48	3,72	4,97	6,21	0,74	0,87	0,99	1,12
		·01	·01	·02	·01	·02	·01	·00	·01	·00
40	20	1,25	2,49	3,74	4,98	6,23	0,75	0,87	1,00	1,12
		·00	·01	·01	·02	·02	·00	·00	·00	·00
50	10	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	0,75	0,87	1,00	1,12
		·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00	·00
6.00	6.00	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	0,75	0,87	1,00	1,12

2.ª CORREZIONE Differenze terze.

Il segno della correzione è simile a quello della differenza terza centrale se l'ora è minore di 6, e contrario se l'ora è maggiore.

ARGOMENTO		DIFFERENZA 3.ª CENTRALE												
ORA DATA		1'=60"	2'	3'	4'	5'	10"	20"	30"	40"	50"	7"	8"	9"
0h 00'	12h 00'	0"00	0"00	0"00	0"00	0"00	0"00	0"00	0"00	0"00	0"00	0"00	0"00	0"00
10	11. 50'	0,07	0,13	0,20	0,27	0,33	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,01	0,01	0,01
20	40	0,13	0,26	0,38	0,51	0,64	0,02	0,04	0,06	0,08	0,11	0,01	0,02	0,02
30	30	0,18	0,37	0,55	0,73	0,92	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,02	0,02	0,03
40	20	0,23	0,47	0,70	0,93	1,17	0,04	0,08	0,12	0,16	0,19	0,03	0,03	0,03
50	10	0,28	0,56	0,83	1,11	1,39	0.05	0,09	0,14	0,19	0,23	0,03	0,04	0,04
1. 00	11. 00	0,32	0,64	0,95	1,27	1,59	0,05	0,11	0,16	0,21	0,27	0,04	0,04	0,05
10	10. 50	0,35	0,71	1,06	1,41	1,77	0,06	0,12	0,18	0,24	0,29	0,04	0,05	0,05
20	40	0,38	0,77	1,15	1,54	1,92	0,06	0,13	0,19	0,26	0,32	0,04	0,05	0,06
30	30	0,41	0,82	1,23	1,64	2,05	0,07	0,14	0,21	0,27	0,34	0,05	0,05	0,06
40	20	0,43	0,86	1,30	1,73	2,16	0,07	0,14	0,22	0,29	0,36	0,05	0,06	0,06
50	10	0,45	0,90	1,35	1,80	2,25	0,07	0,15	0,22	0.30	0,37	0,05	0,06	0,07
2. 00	10. 00	0,46	0,93	1,39	1,85	2,31	0,08	0,15	0,23	0,31	0,39	0,05	0,06	0,07
10	9. 50	0,47	0,95	1,42	1,89	2,36	0,08	0,16	0,24	0,32	0,39	0,06	0,06	0,07
20	40	0,48	0,96	1,44	1,91	2,39	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,06	0,06	0,07
30	30	0,48	0,96	1,44	1,92	2,41	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,06	0,06	0,07
40	20	0,48	0,96	1,44	1,92	2,40	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,06	0,06	0,07
50	10	0,48	0,95	1,43	1,90	2,38	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,06	0,06	0,07
3 00	9. 00	0,47	0,94	1,41	1,87	2,34	0,08	0,16	0,23	0,31	0,39	0,05	0,06	0,07
10	8. 50	0,46	0,92	1,38	1,83	2,29	0,08	0,15	0,23	0,31	0,38	0,05	0,06	0,07
20	40	0,45	0,89	1,34	1,78	2,23	0,07	0,15	0,22	0,30	0,37	0,05	0,06	0,07
30	30	0,43	0,86	1,29	1,72	2,15	0,07	0,14	0,22	0,29	0,36	0,05	0,06	0,06
40	20	0,41	0,83	1,24	1,65	2,06	0,07	0,14	0,21	0,28	0,34	0,05	0,06	0,06
50	10	0,39	0,79	1,18	1,57	1,96	0,07	0,13	0,20	0,26	0,33	0,05	0,05	0,06
4. 00	8. 00	0,37	0,74	1,11	1,48	1,85	0,06	0,12	0,19	0,25	0,31	0,04	0,05	0,06
10	7. 50	0,35	0,69	1,04	1,39	1,73	0,06	0,12	0,17	0,23	0,29	0,04	0,05	0,05
20	40	0,32	0,64	0,96	1,28	1,60	0,05	0,11	0,16	0,21	0,27	0,04	0,04	0,05
30	30	0,29	0,59	0,88	1,17	1,46	0,05	0,10	0,15	0,20	0,24	0,03	0,04	0,04
40	20	0,26	0,53	0,79	1,06	1,32	0,04	0,09	0,13	0,18	0,22	0,03	0,04	0,04
50	10	0,23	0,47	0,70	0,94	1,17	0,04	0,08	0,12	0,16	0,19	0,03	0,03	0,04
5. 00	7. 00	0,20	0,41	0,61	0,81	1,01	0,03	0,07	0,10	0,14	0,17	0,02	0,03	0,03
10	6. 50	0,17	0,34	0,51	0,68	0,85	0,03	0,06	0,09	0,11	0,14	0,02	0,02	0,03
20	40	0,14	0,27	0,41	0,55	0,69	0,02	0,05	0,07	0,09	0,11	0,02	0,02	0,02
30	30	0,10	0,21	0,31	0,41	0,52	0,02	0,03	0,05	0,07	0,09	0,01	0,01	0,02
40	20	0,07	0,14	0,21	0,28	0,35	0,01	0,02	0,03	0,05	0,06	0,01	0,01	0,01
50	10	0,03	0,07	0,10	0,14	0,17	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,00	0,00	0,01
6. 00	6. 00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

3.ª CORREZIONE Differenze quarte.

Il segno della correzione è sempre lo stesso di quello della semisomma delle due differenze quarte.

ARGOMENTO	ORA DATA	SEMISOMMA DELLE DUE DIFFERENZE 4.e								
		10″	20″	30″	40″	50″	60″	7″	8″	9″
0h 00′	12h 00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00
10	11. 50	0,01	0,02	0,03	0,05	0,06	0,07	0,01	0,01	0,01
20	40	0,02	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,02	0,02	0,02
30	30	0,03	0,07	0,10	0,14	0,17	0,20	0,02	0,03	0,03
40	20	0,04	0,09	0,13	0,18	0,22	0,27	0,03	0,04	0,04
50	10	0,06	0,11	0,17	0,22	0,28	0,33	0,04	0,04	0,05
1. 00	11. 00	0,07	0,13	0,20	0,26	0,33	0,40	0,05	0,05	0,06
10	10. 50	0,08	0,15	0,23	0,31	0,38	0,46	0,05	0,06	0,07
20	40	0,09	0,17	0,26	0,35	0,43	0,52	0,06	0,07	0,08
30	30	0,10	0,19	0,29	0,38	0,48	0,58	0,07	0,08	0,09
40	20	0,11	0,21	0,32	0,42	0,53	0,63	0,07	0,08	0,10
50	10	0,11	0,23	0,34	0,46	0,57	0,69	0,08	0,09	0,10
2. 00	10. 00	0,12	0,25	0,37	0,50	0,62	0,74	0,09	0,10	0,11
10	9. 50	0,13	0,26	0,40	0,53	0,66	0,79	0,09	0,11	0,12
20	40	0,14	0,28	0,42	0,56	0,70	0,84	0,10	0,11	0,13
30	30	0,15	0,30	0,45	0,60	0,74	0,89	0,10	0,12	0,13
40	20	0,16	0,31	0,47	0,63	0,78	0,94	0,11	0,13	0,14
50	10	0,16	0,33	0,49	0,66	0,82	0,98	0,11	0,13	0,15
3. 00	9. 00	0,17	0,34	0,51	0,68	0,85	1,03	0,12	0,14	0,15
10	8. 50	0,18	0,36	0,53	0,71	0,89	1,07	0,12	0,14	0,16
20	40	0,18	0,37	0,55	0,74	0,92	1,10	0,13	0,15	0,17
30	30	0,19	0,38	0,57	0,76	0,95	1,14	0,13	0,15	0,17
40	20	0,20	0,39	0,59	0,78	0,98	1,17	0,14	0,16	0,18
50	10	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,21	0,14	0,16	0,18
4. 00	8. 00	0,21	0,41	0,62	0,82	1,03	1,23	0,14	0,16	0,19
10	7. 50	0,21	0,42	0,63	0,84	1,05	1,26	0,15	0,17	0,19
20	40	0,21	0,43	0,64	0,86	1,07	1,29	0,15	0,17	0,19
30	30	0,22	0,44	0,65	0,87	1,09	1,31	0,15	0,17	0,20
40	20	0,22	0,44	0,66	0,89	1,11	1,33	0,16	0,18	0,20
50	10	0,22	0,45	0,67	0,90	1,12	1,35	0,16	0,18	0,20
5. 00	7. 00	0,23	0,45	0,68	0,91	1,14	1,36	0,16	0,18	0,20
10	6 50	0,23	0,46	0,69	0,92	1,15	1,38	0,16	0,18	0,21
20	40	0,23	0,46	0,69	0,92	1.16	1,39	0,16	0,18	0,21
30	30	0,23	0,47	0,70	0,93	1,16	1,40	0,16	0,19	0,21
40	20	0,23	0,47	0,70	0,93	1,17	1,40	0,16	0,19	0,21
50	10	0,23	0,47	0,70	0,94	1,17	1,41	0,16	0,19	0,21
6.00	6. 00	0,23	0,47	0,70	0,94	1,17	1,41	0,16	0,19	0,21

N.B. — La tavola precedente è stata *dopo la stampa* confrontata con l'originale, e si è trovata esente da errori tipografici.

APPLICAZIONI.

Esempio I. Si cerca la declinazione della Luna il 24 gennajo 1834 alle ore $8^h.13'.17'',7$ tempo vero di Napoli. La longitudine di Napoli da Parigi, secondo i dati del Real Officio Topografico è $47'.40'',4$; per cui l'ora corrispondente di Parigi sarà $7^h.25'.37'',3$, e la *Conoscenza de' tempi* di quell'anno darà,

Decl. ☽ il 24 Gennajo a 0^h	*Differenze 1.^e*	*Diff. 2.^e*	*Diff. 3.^e*	*Diff. 4.^e*	*Diff. 5.^e*	*Ora data*
$23°7'52''4$	$+\ 3'40''8$ $-19.34,5$ $-43.11,3$ $-1°.\ 6.25,3$ $-1.28.30,1$	$-23'15''3$ $-23.36,8$ $-23.14,0$ $-22.\ 4,8$	$-21''5$ $+22,8$ $+1'.\ 9,2$	$+44''3$ $+46,4$	$+2''1$	$7^h25'37''3$ $=7.25,62$

Si avrà dunque, *Argomento* $=7^h.25',62$, $\delta'=-43'.11'',3$, $\frac{\delta''+\Delta''}{2}=-23'.25'',4$, $\delta'''=+22'',8$ $\frac{\delta^{iv}+\Delta^{iv}}{2}=45'',35$; e però la parte proporzionale dipendente dalla differenza *prima*, e le correzioni della tavola si calcoleranno come segue;

per 12^h	$-43'11''3$
per 6^h	$-21.35,65$
1	3.35,94
20'	1.11,98
5	17,99
30''	1,80
6	0,36
1,2	0,07
0,1	0,01
p.p.	$-26.43,80$
Correzioni	$+2.46,59$
Decl. ☽ a 0^h	$23°.\ 7.52,40$
Decl. ☽ all'ora data	$22.43.55,19$

Differenze 2.^e	
Arg.° $7^h.30'$ … per 20'	$+140''62$
p.p. per $-4,38$ *di arg.*°	,86
Arg.° idem … per 3'	21,09
p.p. … idem	,13
Arg.° idem … per 20''	2,36
idem … 5	59
idem … 0,4	05
	$+165,70$
	$-0,11$
	$+1,00$
	$+166,59$

Differenze 3.^e	
per 20''	$-0''10$
2	01
	$-0,11$

Differenze 4.^e	
per 40''	$+0''88$
5	11
0.35	01
	$+1,00$

Troviamo lo stesso elemento lunare per mezzo della formola (*M*) (§. I.) commendata da *Oriani*, ed avremo,

1.° *termine*

$$\delta' = -43'11''3$$
$$\delta' = -2591{,}30$$
$$-\tfrac{1}{2}\delta'' = +\ 708{,}40$$
$$-\tfrac{1}{6}\delta''' = -\ \ 3{,}80$$
$$+\tfrac{1}{18}\delta^{iv} = +\ \ 3{,}69$$
$$+\tfrac{1}{36}\delta^{v} = +\ \ 0{,}07$$
$$a = -1882{,}94$$

2.°

$$\delta'' = -23'36''8$$
$$\delta'' = -1416{,}8$$
$$-\tfrac{1}{16}\delta^{iv} = -\ \ 3{,}69$$
$$-1420{,}49$$
$$b = -\ 710{,}24$$

3.°

$$\delta''' = +22''8$$
$$-\tfrac{1}{6}\delta^{iv} = -\ 22{,}15$$
$$-\tfrac{1}{4}\delta^{v} = -\ \ 0{,}52$$
$$+\ 0{,}13$$
$$c = +\ 0{,}02$$

4.°

$$\delta^{iv} = +44''3 \qquad \frac{\delta^{iv}}{24} = 1{,}85,$$

5.°

$$\delta^{v} = +2''1 \qquad \frac{\delta^{v}}{120} = +0{,}02$$

$$\log\frac{N}{12} = 9{,}7916339 \ldots\ l.\left(\frac{N}{12}\right)^2 = 9{,}5832678 \ldots\ldots\ldots\ldots\ l\left(\frac{N}{12}\right)^4 = 9{,}16654$$

$$\log a = 3{,}2748273 \qquad \log b = 2{,}8514112 \qquad l.\tfrac{1}{24}\delta^{iv} = 0{,}26717$$
$$\phantom{\log a = 3{,}27}92 \qquad\qquad 2{,}4346790 \qquad\qquad 9{,}43371$$
$$-3{,}0664704$$

$$-1165{,}40$$
$$-272{,}07$$
$$+0{,}27$$
$$\textit{Totale}\ -1437{,}20$$

$$= -23'57''20$$
$$23.\ 7.52\ ,40$$
$$\textit{Decl}\ ☽ = 22.43.55\ ,20\ \textit{come sopra}$$

$$N = 7^h25'37''3$$
$$= 445.37\ ,3$$
$$= 26737\ ,3$$
$$\frac{N}{12} = \frac{26737\ ,3}{43200}$$

$$\log N = 4{,}4271127$$
$$49$$
$$c.\,l.\,12^h = 5{,}3645163$$
$$l.\,\frac{N}{12} = 9{,}7916339$$
$$9{,}7916339$$
$$l.\left(\frac{N}{12}\right)^2 = 9{,}5832678$$
$$9{,}7916339$$
$$l.\left(\frac{N}{12}\right)^3 = 9{,}3749017$$
$$9{,}7916339$$
$$l.\left(\frac{N}{12}\right)^4 = 9{,}1665356$$

Esempio II. Si cerca la declinazione del Sole il dì 11 Agosto 1842 a $14^h.13'.17'',4$ tempo medio di Napoli. L'ora corrispondente di Parigi sàrà $13^h.25'.37''$, e la *Conoscenza de' tempi* darà,

Decl. ☉ il dì 11 Agosto a 0^h	*Diff.* 1.ª	*Diff.* 2.ª
15°20'49"4	−17'38"9 −17.53,6 −18. 7,9	−14"7 −14,3

Il luogo del termine da interpolarsi è indicato da $13^h.25'.37''$ nell'intervallo di 24^h, e siccome la tavola d'interpolazione suppone l'intervallo di 12^h, così per avere *l' argomento* della tavola, bisognerà prendere la metà dell'ora data, che sarà $6^h.42'.48'',5$. Con questo argomento e con la semisomma delle differenze seconde $-14'',5$ si troverà subito nella tavola la correzione $+1'',78$ da applicarsi alla parte proporzionale ottenuta con la differenza prima; la quale essendo, $-10'.0'',63$, la cercata declinazione risulterà $15°.10'.50'',55$.

Esempio III. Si cerca la distanza della Luna da Aldebaran il giorno 21 Febbrajo 1842 a $5^h.39'.17'',4$ tempo medio di Napoli — L'ora di Parigi sarà $4^h.51'.37''$ ed il luogo del termine da interpolarsi, nell'intervallo di 3^h considerato nelle effemeridi, sarà $1^h.51'.37''$; il quale dovrà moltiplicarsi per 4 per ottenere *l' argomento* della tavola, che suppone l'intervallo di 12^h. Si prendano dalla *Conoscenza de' tempi* i seguenti dati;

Distanza della ☽ da Aldebaran il 21 Febbrajo a 3h di Parigi	*Diff.* 1.e	*Diff.* 2.e
35°53′10″	+1°44′16″ +1.44.58 +1.45.37	+42″ +39″

e sarà, $Arg.^{o}=7^{h}.26',5$, $\delta'=+1.°44'.58''$, $\frac{\delta''+\Delta''}{2}=+40'',5$; e quindi

per 3h............	+1°44′58″
per 1h............	+ 34′59″33
30′...............	17.29 ,67
20...............	11.39 ,78
1..................	34 ,99
30″...............	17 ,49
6..................	3 ,50
1..................	0 ,58
	+1° 5. 5 ,34
	−4 ,77
	35.53.10
Dist. ☽ cercata	=36.58.10 ,57

Differenze 2.e

Arg.° 7h.30′ ... per 40″	−4″69
p.p. per −3,5 di *arg.*°......	2
Arg.° idem .... per 0″5..	6
	−4 ,77

Esempio IV. Si potrebbe proporre il problema inverso cioè, trovare l'ora di Parigi del giorno 21 Febbrajo 1842 corrispondente alla distanza della Luna da Aldebaran 36°.58′.10″,57. In tal caso, ricordandosi che la tavola è calcolata sulla serie

$$y=A_{2}+t\delta'+\frac{t(t-1)}{2}\cdot\frac{\delta''+\Delta''}{2}+\frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{2\cdot 3}\delta''' \text{ etc.}$$

si avrà,

$$y-A_{2}=t(\delta'+\frac{t-1}{2}\cdot\frac{\delta''+\Delta''}{2} \text{ etc. })$$

ed indicando con Σ la somma delle correzioni date dalla tavola, sarà

$$y-A_{2}=t\left\{\delta'+\frac{\Sigma}{t}\right\}, \text{ onde}$$

$$t=\frac{y-A_{2}}{\delta'+\frac{\Sigma}{t}}\ldots\ldots\ldots(K)$$

Questa formola servirà a calcolare il luogo t del dato termine mediante le approssimazioni successive. Nell'esempio proposto sarà, $y=36°.58'.10'',57$, $A_{2}=35°.53'.10''$, $\delta'=+1°.44'.58''$, e si avrà $y-A_{2}=1°.5'.0'',57=3900'',57$, $\delta'=6298''$; e però il primo valore approssimato di t sarà, $\frac{3900,57}{6298}=0,61933$. Riducendo questa frazione in tempo con supporre l'unità eguale a 12^{h}, secondo la tavola, si avrà l'*argomento* $7^{h}.26'$ per calcolare la somma Σ delle correzioni. Questa somma divisa per $t=0,61933$ s'introdurrà nella formola (K) per avere un secondo valore di t più approssimato; che potrà servire a trovarne un terzo, e così di seguito. Il calcolo per la data distanza lunare è come segue;

$Log.(y-A_2) = log\,3900{,}57 = 3{,}5911203$
78
$c.l.\,\delta' = c.l.\,6298 \ldots = 6{,}2007973$
$log\,t = 9{,}7919254$
$t = 0{,}61933 = 7^h.26'$ per la tavola
,12
123866
61933
7|43196
6
25|9176

$log(y-A_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3{,}5911281$
$c.l.\left(\delta' - \frac{\Sigma}{t}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ 6{,}2013287$
$log\,t' = 9{,}7924568$
$t' = 0{,}62009 = 1^h51'37''$
3 3
1|86027 4.51.37 Ora di Parigi cercata
6
51|6162
6
36|972

$Arg.^o\,7^h.30' \ldots$ per $40'' \ldots -4''69$
$p.p. \ldots -4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2$
per 0,5……… 6
$\Sigma = -4{,}77$
$log\,\Sigma = 0{,}6785184$
$c.l.\,t = 0{,}2080746$
$log\,\frac{\Sigma}{t} = 0{,}8865930$
$\frac{\Sigma}{t} = -7{,}702$
$\delta' = 6298$
$\delta' - \frac{\Sigma}{t} = 6290{,}298$

Riducendo il primo valore di $t=0{,}61933$ in parti dell'intervallo 3^h delle effemeridi, si sarebbe ottenuto $1^h.51'.28'',8$, e quindi un errore di $8'',2$ di tempo, non comportabile nella determinazione di una longitudine; laonde l'uso delle differenze seconde pare indispensabile.

Esempio V. La nostra tavola può servire anche ad altre interpolazioni. Si voglia trovare il seno naturale dell'arco decimale $2^o{,}113$ con dieci cifre, facendo uso delle tavole di *Callet* calcolate da decimo in decimo di grado. Queste tavole, tenendo conto anche dell'undecima cifra, daranno,

sen 2°,1	*Diff.* 1.ª	*Diff.* 2.ª	*Diff.* 3.ª
0,0329807409·1	+1569981 8·4 +1569900 4·6 +1569815 2·1	−813·8 −852·5	−38.7

Il luogo del termine da interpolarsi è 0,13, che si moltiplicherà per 12^h per avere l'argomento della tavola, il quale risulterà $1^h.33',6$. Si avrà inoltre

$$\delta' = +15699004{\cdot}6\,,\quad \frac{\delta''+\Delta''}{2} = -833{\cdot}1\,,\quad \delta''' = -38{\cdot}7\,;$$

e per trovare le correzioni della tavola, si supporrà che queste due ultime differenze esprimano secondi, per cui sarà $\frac{\delta''+\Delta''}{2} = -13'.53'',1$, ed il calcolo procederà come segue,

156990 04,6
0,13
470970 138
1569900 46
2040870 598
+47·08
−0·27
0,0329807409·1
0.0331848326·51 = sen 2°,113

Diff. 2.ª
$Arg.^o\,1^h30' \ldots$ per $10' \ldots +32''81$
$p.p. \ldots +3{,}6 \ldots\ldots\ldots\ 1{,}10$
idem ……………… 3' …… 9,84
p.p ………………………… 33
idem ……………… 50'' …. 2,73
p.p. ………………………… 9
idem ……………… 3…… 17
idem ……………… 0,1 … 1
47,08

Diff. 3.ª
$-0'',27$

Questo risultamento combina sino alla decima cifra con quello che vien riportato nella introduzione alle tavole di *Callet* pag. 116, ottenuto per altra via.

Esempio VI. Si cerca il log. seno di 30'.12",35 con dieci cifre decimali, servendosi delle grandi tavole di *Ulacq*. Da queste tavole si hanno i seguenti dati;

log. sen. 30'.10"	*Diff.* 1.ª	*Diff.* 2.ª	*Diff.* 3.ª	*Diff.* 4.ª	*Diff.* 5.ª
7,9432478680	+24194130 +24060084 +23927513 +23796397 +23666707	−13404·6 −13257·1 −13111·6 −12969·0	+147·5 +145·5 +142·6	−2·0 −2·9	−0·9

Il luogo del termine da interpolarsi è 0,235, da cui si ricava per argomento della tavola $2^h.49',2$. E se i numeri indicanti le differenze 2.ª, 3.ª, 4.ª, e 5.ª si suppongono esprimere decimi di secondo, sarà

$$\frac{\Delta''+\delta''}{2}=-13184'',35=-219'.44'',35\,,\ \delta'''=+2'.25'',5\,,\ \frac{\delta^{\text{iv}}+\Delta^{\text{iv}}}{2}=-2'',5\,;$$

per la qual cosa il calcolo del logaritmo cercatò procederà come qui appresso.

Diff. 1.ª
23927 513
0,235
119637 565
717825 39
4785502 6
5622965·555
11861·3
7,9432478680
7,9438113506·9 = *log. sen.* 30'.12",35

Diff. 2.ª		*Diff.* 3.ª	*Diff.* 4.ª
Arg.° $2^h.40'$ ..... per 100'	+518,52	... per 2' .. 0,95 ...	−0,03
p.p. per 9,2	20,76	20" .. 0,16	1
per 100'	539,28	5,5 4	−0,04
10'	53,93	+1,15	
9	48,54		
40"	3,60		
4	36		
0,35	3		
	+1185,02		
	+1,11		

Troviamo lo stesso log. seno per mezzo della serie (2), che non è se non la (*M*) sotto la forma ordinaria. Trascriviamola per norma del calcolo, al quale potrà darsi l'andamento che segue, già da noi accennato nel §. I;

$$y=A_2+t\delta'\quad+\frac{t(t-1)}{2}\delta''\quad+\frac{t(t-1)(t+1)}{2\cdot3}\delta'''+\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{2\cdot3\cdot4}\delta^{\text{iv}}+\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\delta^{\text{v}}$$

$\delta'=$ 23927 513	$\delta''=-13257_1$	$\delta'''=+1455$	$\delta^{\text{iv}}=-20$	$\delta^{\text{v}}=-9$
$t=$ 0,235	$\frac{0,235\times-0,765}{2}=a$,	$a.\frac{1,235}{3}=b$,	$b.\frac{-1,765}{4}=c$,	$c.\frac{2,235}{5}$
119637 565				
717825 39	*l.* 0,1175 = 9,0700379	+0,41167	−0,441	+0,447
4785502 6	*l.* 0,765 = 9,8836614			
5622965·555	−8,9536993 ...	−8,95370		
11862·24	*l.δ"* −5,1224453	+9,61455		
A_2 = 7,9432478680	33	−8,56825	−8,56825	
y = 7·9438113507·8	+4,0761479	+3,16286	−9,64444	
	+11916,48	−1,73111	+8,21269	+8,21269
	−54,24	−53,84	−1,30103	+9,65031
	+11862,24	33	−9,51372	−0,95424
		7	−0,33	−8,81724
		−54,24		−0,07

Questo risultamento differisce soltanto di un'unità nella decima cifra da quello ottenuto per mezzo della tavola. Il quale piccolo errore dipende da che nel calcolo della 1.ª *correzione* le differenze della tavola non sono costanti, e quando la correzione medesima è molto grande, la parte proporzionale, corrispondente alla frazione del dato argomento, non risulta esattissima. Nel calcolo degli elementi astronomici in cui la semisomma delle *differenze seconde*, anche per la Luna, non giunge mai a 30', l'errore in discorso riesce insignificante; ma esso potrebbe pure eliminarsi da qualunque altra interpolazione, applicando alle differenze della tavola l'*Aumento* indicato in piedi di essa. Così nell'esempio precedente la *correzione* per 10', con l'argomento $2^h.40'$ è 51,852, e la parte proporzionale deve calcolarsi moltiplicando il decimo della differenza della tavola per i minuti dispari 9',2. Prima di eseguire quella moltiplicazione si accrescerà la differenza 2,257 del prodotto $0{,}0058 \times 0',8 = 0{,}005$, che è quello dell'*Aumento* 0,0058, registrato in piedi della colonna, pel complemento 0',8 del numero de'minuti 9',2 *che serve a calcolare la parte proporzionale*. La differenza aumentata risulterà 2,262, e la parte proporzionale sarà $0{,}2262 \times 9{,}2 = 2{,}081$. Laonde la *correzione* della tavola per 100' con l'argomento $2^h.49',2$ sarà 539,33, e la correzione totale riguardante le *differenze* 2.ᵉ ascenderà a 1185,12; dove si vede corretto l'errore annunziato qui sopra di un'unità nella decima cifra decimale.

Se l'argomento in vece di essere $2^h.49',2$ fosse stato $9^h.10',8$, si sarebbe proceduto nel modo seguente per giungere allo stesso risultamento. Affinchè la parte proporzionale riesca sempre additiva, si dovrà prendere nella tavola la *correzione* 51,852 corrispondente all'argomento prossimamente maggiore $9^h.20'$; la quale dovrà essere accresciuta del decimo della differenza della tavola moltiplicato per 9',2. Questo numero di minuti, *che serve a calcolare la parte proporzionale*, ha per complemento 0',8, per cui l'*aumento* della differenza della tavola, secondo l'indicazione posta in piedi di essa, sarà, $0{,}8 \times 0{,}0058 = 0{,}005$, e la parte proporzionale risulterà dal prodotto di $\frac{2{,}257+0{,}005}{10} \times 9{,}2$, e sarà 2,081 come sopra — Ripetiamo, che nel calcolo degli elementi astronomici le differenze della tavola potranno sempre adoperarsi quali sono; ed osserviamo anche che, se non avessimo avuto lo scopo di far servire la nostra tavola a qualunque specie d'interpolazione, sarebbe bastato riportare con tre cifre decimali i soli numeri contenuti nelle prime due colonne della 1.ª *correzione*, onde aver riguardo al massimo valore che possono acquistare le *differenze* 2.ᵉ per la Luna. E però chi volesse limitare l'uso della tavola al solo calcolo degli elementi astronomici, potrà rendere più semplici i due quadri riguardanti i *minuti* delle *differenze seconde*.

Esempio VII. Sia al contrario proposto di trovarsi l'arco corrispondente al log. seno trovato qui sopra con dieci cifre, 7,9438113508. Dalle tavole di *Ulacq* si ha che il seno prossimamente minore è 7,9432478680, il quale corrisponde all'arco 30'.10". Per trovare i secondi dispari, e le frazioni di secondo, bisognerà applicare la formola (K) menzionata nell'*Esempio IV;* al quale oggetto, fatto il quadro delle differenze, si avrà,

$$y-A_2 = 5634828,\ \delta' = 23927513,\ \frac{\delta''+\Delta''}{2} = -219'.44'',35,\ \delta''' = +2'.25'',5,\ \frac{\delta^{iv}+\Delta^{iv}}{2} = -2''5;$$

e però il calcolo di t sarà come segue,

$\log(y-A_2)=6,7508807$
$C.l.\,\delta'=2,6211024$
$\log t=9,3719831$
$t=0,2355\ldots\ldots 2^h.49',6$

12
4710
2355
2|8260
6
49|56

$\log(y-A_2)=6,7508807$
$C.l\left(\delta'+\frac{\Sigma}{t}\right)=2,6201876$
$\log t'=9,3710683$
$t'=0,23500$
$t'=2'',35$ *come sopra*

Diff. 2.ª — *Diff. 3.ª* — *Diff. 4.ª*

Arg.º 2ʰ.40' ... per 100' +518,52 } .... 0,95 .... −0,04
p.p. .... 21,67 } — 16
100' .... 540,19 — 4
10 ..... 54,02 — 1,15
9' 48,62
40'' .. 3,60
4 36
0,35 — 3

+1187,02
+1,11
$\Sigma=1188,12$

$\log\Sigma=3,0748603$
$C.\,l.\,t=0,6280169$
$\log\frac{\Sigma}{t}=3,7028772$
$\frac{\Sigma}{t}=5045\cdot 2$
$\delta'=23922751\cdot 3$
$\delta'+\frac{\Sigma}{t}=23977965$

Esempio VIII. Per ultima applicazione, cerchiamo il logaritmo di un numero dato con dieci cifre decimali, ed il numero di un dato logaritmo, servendoci della tavola di *Callet* in cui sono registrati i logaritmi de' numeri da 1 sino a 1200 con 20 decimali. Si voglia il logaritmo del rapporto del diametro alla circonferenza 3,1415926536 con dieci cifre decimali. Moltiplichiamo o dividiamo questo numero per un numero di una sola cifra, ad oggetto di poterci servire de' logaritmi dei numeri il più che si può vicini al massimo 1200 della tavola, pei quali le differenze seconde non sono molto grandi. Eseguendo la moltiplicazione per 3, avremo 9,4247779608, e ricaveremo dalla tavola i seguenti dati

log 9,42	*Diff. 1.ª*	*Diff. 2.ª*	*Diff. 3.ª*
0,9740509027·9	+4612793·6 +4607899·5 +4603015·6	−4894·1 −4883·9	+10·2

Il luogo del termine da interpolarsi essendo 0,4778, l'argomento corrispondente della tavola si troverà di 5ʰ.44',02. Si avrà inoltre $\frac{\delta''+\Delta''}{2}=-4889''=-81'.29''$, $\delta'''=+10'',2$; ed il calcolo del logaritmo cercato sarà come segue

Diff. 1.ª

46078995
80697774
184315980
32255296
3225530
322553
41470
2764
37
2201636·30

Diff. 2.ª

per 80' .... 598''15 }
p.p. .... 0,56 }
1 7,48
20 2,49
9 1,12

+609·80
0·01
2201636·30
0,9740509027·9

0,9742711274·0
$\log 3=0,4771212547\cdot 2$
$\log\pi=0,4971498726\cdot 8$

Diff. 3.ª

0,012

Sia dato ora il logaritmo 0,4971498726·8 e si cerchi il numero corrispondente. Si tolga dal log. proposto il logaritmo di 3, e si avrà il resto 0,0200286179·6, di cui il prossimamente minore nella tavola di *Callet* corrisponde ad 1,047; e però si avrà il seguente quadro,

log 1,047	*Diff.* 1.ᵉ	*Diff.* 2.ᵉ	*Diff.* 3.ᵉ
0,0199466816·8	+4149971·5 +4146009·7 +4142055·5	−3961·8 −3954·2 $\frac{\delta''+\Delta''}{2}$ = −3958 = −65′58″	+7·6

ed applicando la formola (K) sarà,

Si vende al prezzo di gr.ⁱ 30 nel Deposito di smercio del R. Officio Topografico, *Largo del Castello n. 11*,
ed in casa dell'autore *Strada S. Mattia n. 75. terzo piano.*